SIMULAZIONE SECONDA PROVA

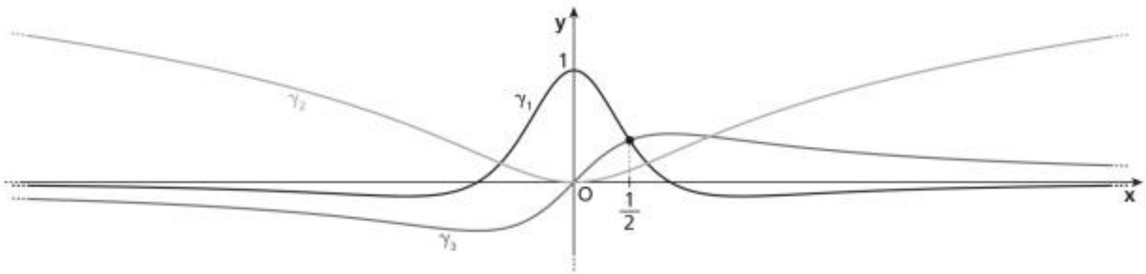
Problema 1

Considera la funzione $f(x) = \frac{ax}{4x^2+b}$, con a e b parametri reali non nulli. Siano inoltre

$$g(x) = f'(x), \qquad h(x) = \int_0^x f(t)\,dt,$$

rispettivamente la funzione derivata prima e la funzione integrale relativa a $f(x)$.

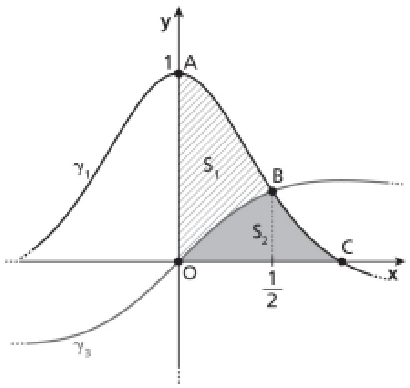
Nella figura sono rappresentati i grafici delle tre funzioni in uno stesso riferimento cartesiano Oxy.



1. Associa ciascuna funzione al rispettivo grafico esplicitando dettagliatamente le motivazioni. Usa i dati in figura per determinare i valori delle costanti a e b.
2. Nel punto **1** hai verificato che $a = 3$ e $b = 3$. Considera le funzioni $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ per questi valori dei parametri a e b. Ricava esplicitamente le espressioni delle funzioni $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$. Determina i punti di massimo e minimo relativi delle tre funzioni. Inoltre, trova i punti di flesso delle funzioni $f(x)$ e $h(x)$.
3. Calcola i limiti $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^2}$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{h(x)}{\ln x}$.
4. Detti A e C i punti di intersezione della curva γ_1 con l'asse y e con l'asse x, rispettivamente, e B il punto di intersezione delle curve γ_1 e γ_3, siano S_1 la regione piana OAB e S_2 la regione piana OBC rappresentate in figura.

   Calcola il rapporto fra l'area di S_1 e quella di S_2.

   Esplicita le eventuali considerazioni teoriche relative alle funzioni coinvolte che permettono di semplificare il calcolo.



Problema 2

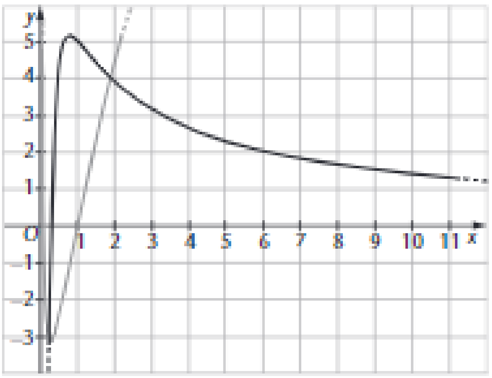
Considera una funzione del tipo: $f(x) = x(a\ln^2 x + b\ln x + c)$, con a, b, c parametri reali.

1 Determina il valore dei parametri, sapendo che la funzione presenta un estremo relativo per $x = e^{-\frac{5}{2}}$, di valore $9e^{-\frac{5}{2}}$, e un punto di flesso a tangente obliqua per $x = e^{-\frac{5}{4}}$.

2 Verificato che la funzione cercata è $f(x) = x(2\ln^2 x + \ln x - 1)$, studiala fino a tracciare il suo grafico, determinando in particolare eventuali asintoti, altri punti di estremo, di cui è richiesta la classificazione, altri punti di flesso, per i quali è richiesto il calcolo della tangente inflessionale.

3 Il grafico della funzione individua, con l'asse delle ascisse, due regioni finite di piano. Calcola la loro area.

4 La seguente figura mostra i grafici delle funzioni $y = f'(x)$ e $y = f''(x)$. Associa ciascuna funzione al corrispondente grafico, motivando la tua scelta.



Senza ricorrere al calcolo di primitive, verifica che:

- il grafico disegnato in grigio forma con l'asse x e l'asse y una regione di piano illimitata di area finita, di cui è richiesto il valore;
- il grafico disegnato in nero forma con l'asse x e l'asse y una regione di piano illimitata di area infinita.

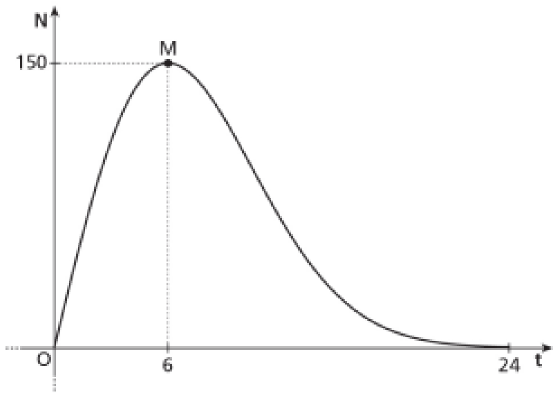
QUESITI

1. Determina l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che $f''(x) = 2 - \frac{20}{x^3}$ e che la retta di equazione $y = 16x - 16$ è tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel suo punto $P(1; 0)$. Trova gli eventuali asintoti della funzione $y = f(x)$.

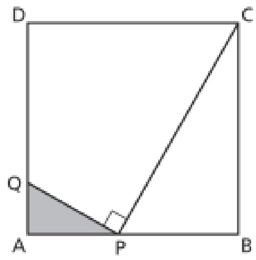
2. Un negozio di abbigliamento ha aperto un nuovo sito di *ecommerce*. L'andamento del numero di accessi alla home page del sito nel giorno di lancio della piattaforma di *ecommerce* è modellizzato dal grafico in figura.
Il tempo t è espresso in ore, mentre il numero N in migliaia di accessi.
Determina per quali valori dei parametri reali e positivi a e b, la funzione

$$N(t) = at\, e^{-bt^2}, \qquad \text{con } t \in [0; 24],$$

ha l'andamento in figura. Stima il numero di accessi dopo 24 ore da quando il sito è stato lanciato.



3. Considera un quadrato $ABCD$ di lato 1. Sia P un punto del lato AB e sia Q l'intersezione tra il lato AD e la perpendicolare in P al segmento PC.
Determina $x = \overline{AP}$ in modo che l'area S del triangolo APQ sia massima e ricava $S_{\max}$. Determina $x = \overline{AP}$ in modo che il volume V del cono ottenuto per rotazione del triangolo APQ intorno al cateto AP sia massimo e ricava $V_{\max}$.



4. Considera le funzioni

$$f(x) = ax(5 - 2x), \qquad g(x) = x^2\left(\frac{5}{2} - ax\right), \qquad \text{con } a \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Determina per quale valore di a si ha $f(2) = g(2)$. Verifica che per questo valore di a i grafici delle due funzioni hanno tre punti in comune.

Considerando il valore di a determinato in precedenza, stabilisci se nell'intervallo $[0; 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange alle due funzioni. In caso affermativo, determina per entrambe le funzioni i valori $c \in]0; 2[$ per cui è verificata la tesi.

Stabilisci, inoltre, se nell'intervallo $[0; 2]$ siano soddisfatte le ipotesi del teorema di Cauchy per la coppia di funzioni $f(x)$ e $g(x)$. In caso affermativo, trova i valori $x \in]0; 2[$ per cui è verificata la tesi.

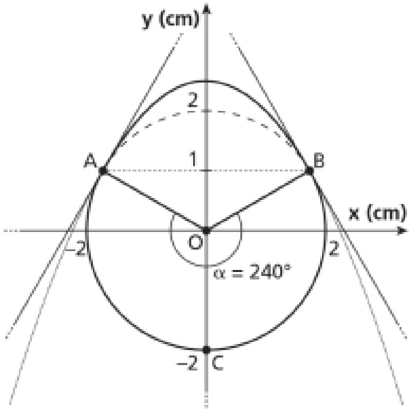
5. Nel sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$ la retta r è definita dal seguente sistema di equazioni parametriche

$$r: \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = t + 1 \end{cases}.$$

Determina il punto P che appartiene alla retta r e che si trova alla distanza minima dall'origine del sistema di riferimento. Ricava l'equazione del piano α passante per P e perpendicolare a r.

6. Una gioielliera realizza un medaglione d'argento il cui profilo, rappresentato in figura, è delimitato dall'arco ACB della circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ e dall'arco di parabola AB.

Determina l'equazione della parabola sapendo che è tangente alla circonferenza nei punti A e B di ordinata 1 e scrivi le equazioni delle rette tangenti alle curve nei due punti comuni. Stima la massa del medaglione, sapendo che il suo spessore uniforme è di 2,0 mm e che la densità dell'argento è $\rho_{Ag} = 10{,}49 \text{ g/cm}^3$.



7. Il grafico della funzione $y = \cos\frac{\pi x}{2}$ divide il quadrato Q di vertici $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(1; 1)$ e $(0; 1)$ in due regioni R_1 e R_2, con $\text{Area}(R_1) > \text{Area}(R_2)$. Scelti a caso, uno dopo l'altro, tre punti interni al quadrato Q calcola la probabilità che solo l'ultimo punto appartenga alla regione R_1.

8. Determina per quali valori dei parametri a e b il grafico della funzione

$$f(x) = (ax + b)e^{-x}, \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

presenta nel suo punto d'intersezione con l'asse y una retta tangente parallela alla retta di equazione $3x + 2y + 1 = 0$ e la funzione $f(x)$ è tale che $f''(x)$ è uguale a $f(x) + e^{-x}$.